Motto:

„Matematica este ca urcuşul la munte. Efortul este răsplătit de privelişti măreţe. Ca şi pe munte, ascensiunile în matematică sunt frumoase dacă nu eşti obsedat doar de locul unde vrei să ajungi şi dacă eşti în stare să savurezi tot ceea ce întâlneşti pe parcurs.“
(Solomon Marcus – „Şocul matematicii“)

Cuvânt înainte

În general când vorbim despre o publicaţie şcolară exprimăm întotdeauna cuvenita stima pentru râvna profesorilor şi elevilor care o redactează, pentru valoarea preocupării şi a efortului lor; fiind tentaţi să îi judecăm reuşita cu măsuri mai indulgente decât o facem în cazul unei publicaţii profesioniste. Cert este însă că aceşti copii au deprinderea de a scrie, au dobândit uşurinţa de a observa lumea, îşi exprimă limpede gândurile, iar aceasta înseamnă mult. Înseamnă înainte de toate măiestria de a făuri cunoştine, de a modela oameni, fiecare o cărămidă trainică la temelia zidului prezentului şi viitorului nostru.

Marile succese ale tehnicii, adânc pătrunse în viaţa oamenilor, sub toate formele ei, au contribuit la creşterea rolului fundamental al matematicii. În multe privinţe matematica este o ştiinţă abstractă şi aceasta în special în ceea ce priveşte modul de punere a problemelor. În timp ce un cercetător dintr-un domeniu ca: medicina, zoologia, botanica, geologia sau chiar lingvistica, istorie şi astronomie, poate să expună unui neiniţiat mare parte a problemelor, rezultatelor, ba chiar şi a metodelor şi principiilor de bază din domeniul sau de specialitate, în aşa fel încât neiniţiatul să-şi poată face o idee de ansamblu asupra domeniului respectiv, acest lucru este foarte greu de făcut pentru fizica şi chimia contemporană şi încă şi mai greu pentru matematica contemporană.

“Matematica este nici mai mult, nici mai puţin, decât partea exactă a gândirii noastre.”
(L.E.J. Brouwer)

Acesta este nr. 3 al revistei noastre.Recunoaştem, a fost mai greu de realizat acest număr dar ne bucură mult finalizarea lui! Deşi nu am primit prea multe cereri pentru funcţia de redactor al revistei de mate-info a liceului nostru, noi nu vom abandona şi vom continua drumul ales. Mulţumim celor care au fost şi sunt (încă !) alături de noi.

Redacţia

Geometria ca suport al creaţiei

Geometria este prima ştiinţă care s-a apropiat cel mai mult de artă şi s-a implicat împreună cu aceasta în evoluţia culturii.

Geometria nu s-a născut numai din "agrimensura", cum se menţionează uneori, ci cu mult înainte, din nevoile de descriere şi folosire a obiectelor şi fenomenelor naturii, în special pe calea vizualului. Chiar dacă astronomia datează dintr-o vreme şi mai îndepărtată, observaţiile astronomice, total empirice, nu au devenit utilizabile decît atunci când geometria a atins o anumită dezvoltare.

Esenţă a formei şi mişcării pămînteşti şi cereşti, lumină şi umbră, ritm, creştere, viziunea umană însăşi, geometria s-a născut odată cu cioplirea pietrei şi pictura rupestră.

În Egiptul secolului al XX-lea î.Hr. se cunoşteau regulile de calcul pentru aria paralelogramului, triunghiului şi trapezului, pentru volumul prismei, piramidei, trunchiului de piramidă şi aria cercului.

Cunoştinţele de geometrie ale egiptenilor sunt cele care răspund etimologiei cuvântului "geometrie"-măsurarea spaţiului.

Grecii secolului al VII-lea î.Hr. au transformat geometria într-o ştiinţă teoretic fundamentală. Geometria greacă a devenit şi un mod de gândire implicat tehnicii, artei şi chiar filozofiei, cu putere de demonstraţie în toate ştiinţele şi de aplicaţie în diverse domenii de creaţie.

De-a lungul evoluţiei sale, prin informaţie (forme plane şi spaţiale, proporţii, relaţii dintre elemente geometrice, elemente de compoziţie), prin formaţia impusă celui ce o utilizează (mod de gândire, modul de a vedea în spaţiu, mod de a înţelege uşor corespondenţa plan-spaţiu, măsură şi ordine în gândire), prin desen (ca instrument de lucru), geometria a devenit un element fundamental în domeniile cele mai diverse ale activităţii umane: ştiinţă, tehnică, artă, medicină, cultură, învăţământ, protecţia mediului,etc.

Ca principal element al proiectării, geometria este limbajul procesului de creaţie începând de la furnizare de date, idei de realizare, intuiţie a soluţiei şi imagini spaţiale finale, până la realizare. Ea se bazează pe schematizarea percepţiei vizuale, şi în final pe geometria decriptivă.

În proiectare (mecanică, instalaţii industriale, arhitectură, construcţii, electronică etc), în care desenul nu este un scop în sine, ci un mijloc, trebuie să se asigure corespondenţa spaţiu-plan, prin proiecţiile ortoganale şi prin <u>pura</u> geometriei descriptive. Deci geometria ca element al matematicii în tehnică şi artă, deţine puterea de sinteză şi creaţie.

În aceasta direcţie orice educaţie matematică trebuie să cuprindă şi elementele fundamentale ale geometriei antice greceşti: ca factor generator de elemente, metoda (contact cu mediul înconjurător, vizualizare) şi rezultat final (creaţie spirituală şi materială, deci artistică, tehnică).

În "Formarea matematică" Dan Barbilian evoca încântarea sa de adolescent în faţa geometriei clasice greceşti remarcând: "Le-am uitat pe toate acestea? Nu face nimic. Cultura este, după definiţia nu mai ştiu cui, ceea ce rămâne după ce ai uitat tot - aşadar, <u>virtualităţile</u>, predispoziţiile. Dar asta nu înseamnă că sunt pierdute. Sunt undeva la temelia fiinţei noastre, formează individualitatea noastră."

Profesor Mariana Leu

Probleme rezolvate

Clasa a VII-a

Problema 1.

În triunghiul ascuţitunghic ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor AB, AC respectiv BC şi AA', BB', CC', sunt înălţimile triunghiului. Să se demonstreze că triunghiurile MNA', MPB', NPC' sunt congruente.

Soluţie:

Deoarece M şi N sunt mijloacele laturilor AB şi AC rezultă că MN este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $MN = \frac{BC}{2}$. Analog MP şi NP sunt linii mijlocii în ΔABC şi deci $MP = \frac{AC}{2}, NP = \frac{AB}{2}$.

În triunghiul dreptunghic $AA'B$ $\left(\widehat{AA'B} = 90^\circ\right)$ MA' este mediană deci $MA' = \frac{AB}{2}$ iar în triunghiul dreptunghic $AA'C$ $\left(\widehat{AA'C} = 90^\circ\right)$ NA' este mediană, de unde rezultă că $NA' = \frac{AC}{2}$.

Prin urmare, lungimile laturilor $\Delta MNA'$ sunt $MN = \frac{BC}{2}, MA' = \frac{AB}{2}, NA' = \frac{AC}{2}$ (1)

Analog, lungimile laturilor $\Delta MPB'$ sunt: $MP = \frac{AC}{2}, MB' = \frac{AB}{2}, PB' = \frac{BC}{2}$ (2)

iar lungimile laturilor $\Delta PNC'$ sunt: $NP = \frac{AB}{2}, NC' = \frac{AC}{2}, PC' = \frac{BC}{2}$ (3)

Din relaţiile (1), (2) şi (3) rezultă că $\Delta MNA' = \Delta MPB' = \Delta NPC'$ (caz L.L.L), q.e.d.

Clasa a VIII-a

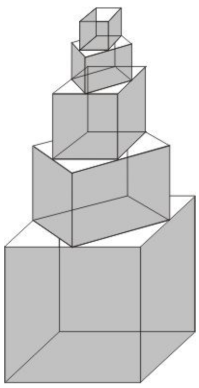
Problema 2.

Pe faţa ABCD a unui cub de muchie a se aşează alt cub care are vârfurile unei feţe în mijloacele laturilor feţei ABCD. Deasupra acestuia se aşează în acelaşi mod un alt cub şi se continuă mereu această operaţie. Să se afle:

a) Înăţimea coloanei de cuburi.

b) Volumul coloanei de cuburi

c) Aria totală a coloanei.



Soluţie.

a) Dacă muchia cubului dat este $m_1 = a$ atunci diagonala unei feţe este $d_1 = a\sqrt{2}$ şi deci muchia cubului următor va fi $m_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, cu diagonala unei feţe $d_2 = \frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2} = a$, deci muchia celui de-al treilea cub va fi $m_3 = \frac{a}{2}$. Astfel calculând următoare muchii vor fi $m_4 = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $m_5 = \frac{a}{4}$, $m_6 = \frac{a\sqrt{2}}{8}$, $m_7 = \frac{a}{8}$ etc.

Cum înălţimea H a coloanei este suma muchiilor obţinem $H = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots \Rightarrow$

$$H = a + \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{8} + \frac{a}{8} + \ldots = \left(a + \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \ldots\right) + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{2}}{8} + \ldots\right)$$

aşadar $H = a\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right) + a\sqrt{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)$

Să ne ocupăm de suma $s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.. care este o sumă infinită!

Pornim de la suma $S = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n$.

Dacă înmulţim această sumă cu q obţinem $S\cdot q = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n+1}$ de unde scăderea

$S\cdot q - S = \cancel{q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n} + q^{n+1} - \left(1 + \cancel{q + q^2 + q^3 + \ldots + q^n}\right) = q^{n+1} - 1$ conduce la

$S(q-1) = q^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Pentru $|q| < 1$ avem: $0 < S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$.

În cazul sumei s_1 avem $q = \frac{1}{2}$, deci q^{n+1} devine foarte mic, apropiat de 0 şi avem $0 < s_1 < \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Prin urmare pentru un număr nemărginit de termeni suma se apropie de valoarea 2.

Din acest motiv putem scrie $s_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 2$.

Revenind la H avem: $H = a\underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)}_{2} + a\sqrt{2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots\right)}_{2-1=1} = 2a + a\sqrt{2} = a\left(2 + \sqrt{2}\right)$.

b) Pentru volumul coloanei de cuburi avem $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n + \ldots$ unde $V_1 = a^3$, $V_2 = \frac{a^3}{4}$, $V_3 = \frac{a^3}{16}$..

Astfel $V = a^3\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \frac{1}{4^n} + \ldots\right)$. Notând $s_2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots + \frac{1}{4^n} + \ldots$ şi raţionând ca şi în cazul sumei s_1, avem $q = \frac{1}{4}$ deci $0 < s_2 < \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$. În felul acesta, pentru un număr nemărginit de termeni s_2 se apropie de valoarea $\frac{4}{3}$ şi deci volumul coloanei de cuburi este $V = \frac{4a^3}{3}$.

c) Pentru aflarea ariei totale a coloanei de cuburi, observăm că la toate cuburile , patru dintre feţele lor rămân neacoperite, în afară de primul cub, care are şi baza liberă. La primul cub, din faţa pe care stă cubul al doilea, rămâne neacoperită o suprafaţă a cărei arie se scrie $a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$. La cubul al doilea partea neacoperită este $\frac{a^2}{4}$, la cel de-al treilea cub $\frac{a^2}{8}$, şi aşa mai departe. Deci suma tuturor părţilor neacoperite este $S' = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + ... = a^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ...\right)}_{1} = a^2$, conform punctului a). Astfel aria totală a coloanei de cuburi este $A = \underbrace{a^2}_{\text{baza cubului}} + 4\underbrace{\left(a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + ...\right)}_{\text{fețele laterale ale cuburilor}} + \underbrace{a^2}_{S'} = 2a^2 + 4a^2\left(s_1\right) = 10a^2$.

Clasa a IX-a

Problemă 3. Pentru ce valori ale lui x are loc egalitatea?

$$\sqrt[3x-1]{\sqrt[8-3x]{(-x)^{x}}} = \sqrt[5x]{4}.$$

(13 092, GM-B, 1973, C. Oltescu şi L. Pîrşan)

Soluţie. Punând condiţiile de existenţă ale indicilor radicalilor, obţinem $3x-1 \in \mathbf{N} \cap [2,\infty) \quad (1)$, $8-3x \in \mathbf{N} \cap [2,\infty) \quad (2)$, $5x \in \mathbf{N} \cap [2,\infty) \quad (3)$. Din (1) rezultă $x \in \left\{\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \frac{7}{3}, ...\right\} = A$, din (2) rezultă $x \in \left\{\frac{6}{3}, \frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, ...\right\} = B$şi din (3) $x \in \left\{\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \frac{6}{5}, ...\right\} = B$. Cum x aparţine simultan mulţimilor A, B şi C atunci $x \in A \cap B \cap C = \{1, 2\}$

Pentru $x = 1$ se obţine $\sqrt[2]{\sqrt[5]{(-1)^1}} = \sqrt[5]{2}$ unde membrul I nu are sens! Deci x=1 nu poate fi soluţie a ecuaţiei din enenţ.

Pentru $x = 1$ se obţine $\sqrt[5]{\sqrt[2]{(-1)^2}} = \sqrt[10]{4}$, relaţie adevărată, deci x=2 este unica soluţie a ecuaţiei date.

Problemă 2.

Să se afle $n \in N$ pentru care: $\sqrt{5n+1} + \sqrt{3n-5} \le 10$

(Iuliana Stoica)

Soluţie :

Din condiţiile de existenţă ale radicalilor $5n+1 \ge 0,\ 3n-5 \ge 0$, se obţine $n \ge \frac{5}{3}$ (1). Se ridică la pătrat :

$5n+1+3n-5-2\sqrt{(5n+1)(3n-5)} \le 100 \Leftrightarrow 2\sqrt{15n^2-22n-5} \le -8n+104 \Leftrightarrow \sqrt{15n^2-22n-5} \le -4n+52.$

Din condiţia de compatibilitate $-4n+52 \ge 0 \Rightarrow n \le 13$ (2) iar din (1) şi (2) obţinem $n \in \left[\frac{5}{3}, 13\right) = A.$

Se ridică din nou la pătrat şi se obţine :

$15n^2 - 22n - 5 \le 16n^2 - 416n + 52^2 \Rightarrow n^2 - 394n + 2709 \ge 0 \Rightarrow n \in (-\infty, 7] \cup [387, \infty) = B$.

Cum n este natural, rezultă $n = A \cap B \cap \mathbf{N} = \{1, 2, 3, ...7\}$. Pentru n=7 se obţine egalitate.

Problema 2. Se dă patrulaterul convex ABCD. Să se determine un punct M în interiorul lui, astfel încât suma $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ sa fie minimă.

Soluţie.

Fie P,Q,R respectiv S mijloacele laturilor AB,BC,DC respectiv AD. Notăm cu x, y, z, t respectiv $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ lungimile segmentelor MA, MB, MC, MD respectiv MR, MS, MP, MQ. Aplicăm teorema medianei în triunghiurile MAD si MBC. Obţinem:

$$4\beta^2+d^2=2(x^2+t^2) \text{ şi } 4\delta^2+b^2=2(y^2+z^2)$$

de unde prin adunare rezulta ca

$$2(x^2+y^2+z^2+t^2)=b^2+d^2+4(\beta^2+\delta^2).$$

Deoarece b^2+d^2 este constanta, expresia $x^2+y^2+z^2+t^2$ este minima cand $\beta^2+\delta^2$ este minima.

Fie N mijlocul segmentului SQ.Aplicam teorema medianei in triunghiul MSQ şi obţinem:

$$\beta^2+\delta^2=\frac{SQ}{2}+2MN^2$$

deci $\beta^2+\delta^2$ este minimă când segmentul MN este minim, deci dacă M=N, adică dacă M este mijlocul segmentului SQ.

Procedând analog cu triunghiurile MAB si MDC, rezultă că expresia dată este minimă când M este mijlocul segmentului PR. Dar patrulaterul SPQR este paralelogram şi deci mijloacele segmentelor SQ şi PR coincid. În concluzie suma $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ este minimiă cand punctul M coincide cu intersecţia diagonalelor din paralelogramul SPQR.

Clasa a X-a

Problema 1.

Fără a utiliza tabele de logaritmi să se arate că $\log_3 7\cdot\log_3 11>\log_5^2 10$.

Solutie:

Inegalitatea din enunţ se mai poate scrie $\frac{\log_3 11}{\log_5 10}>\frac{\log_5 10}{\log_3 7}$.

Vom arăta că: $\frac{\log_3 11}{\log_5 10}>1$ şi $\frac{\log_5 10}{\log_3 7}<1$. Prima inegalitate se poate scrie $\log_3 11>\log_5 10$.

Cum $\log_3 11>\log_3 9=2$ şi $\log_5 10=\log_5 5+\log_5 2=1+\underbrace{\log_5 2}_{\in(0,1)}<2$ deducem că fracţia este subunitară.

Pentru a stabili a doua inegaliate, avem succesiv: $\log_5 10=\log_5 5+\log_5 2=1+\frac{1}{\log_2 5}<1+\frac{1}{\log_2 3}=$
$=\log_3 3+\log_3 2=\log_3 6<\log_3 7$ adică cea de a doua fracţie este subunitară. q.e.d.

Problema 2. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases}\left(\frac{1}{4}\right)^x+\left(\frac{1}{27}\right)^y=\frac{5}{6}\\ \log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{27}}y=\frac{1}{6}\end{cases}$.

Solutie.

Deoarece $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ şi $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}-\log_{\frac{1}{27}}\frac{1}{3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ rezulta că $x=\frac{1}{2}, y=\frac{1}{3}$ este o soluţie a sistemului. Să demonstrăm că aceasta soluţie e unică.

1) Dacă $x>\frac{1}{2}$ şi $y>\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\frac{1}{4}\right)^{x}<\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$ şi $\left(\frac{1}{27}\right)^{y}<\left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}$.

Deci $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+\left(\frac{1}{27}\right)^{y}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$, deci sistemul nu admite solutii $x>\frac{1}{2}$ şi $y>\frac{1}{3}$.

2) Dacă $x>\frac{1}{2}$ si $y<\frac{1}{3}\Rightarrow$ $\log_{\frac{1}{4}}x<\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ şi $\log_{\frac{1}{27}}y>\log_{\frac{1}{27}}\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

Deci $\log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{27}}y<\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ şi a doua ecuaţie a sistemului nu este verificată.

3) Dacă $x<\frac{1}{2}$ si $y<\frac{1}{3}$ avem: $\left(\frac{1}{4}\right)^{x}+\left(\frac{1}{27}\right)^{y}>\frac{5}{6}$ şi sistemul nu admite soluţii.

4) Dacă $x<\frac{1}{2}$ si $y>\frac{1}{3}$ avem: $\log_{\frac{1}{4}}x-\log_{\frac{1}{27}}y>\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ deci nu admite soluţii nici în acest caz.

Clasa a XI-a

Problema 21461 (G.M.5-6/1988, pag 256)

Fie $A\in M_n(R)$ o matrice în care $a_{ij}=0$ pentru i+j= par, $1\le i,j\le n$. Să se arate că dacă n este impar, atunci determinantul matricei A este nul.

Gheorghe Bordea, Constanţa

Soluţie*:*

Cu elementele matricei A şi inlocuind elementele nule ale matricei cu x, construim determinantul:

$$D_n(x)=\begin{vmatrix} x & a_{12} & x & a_{14}\,\ldots\ldots\ldots & x \\ a_{21} & x & a_{23} & x\ \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ x & a_{32} & x & a_{34}\,\ldots\ldots\ldots & x \\ a_{41} & x & a_{43} & x\ \ldots\ldots\ldots & a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ x & a_{n2} & x & a_{n4}\,\ldots\ldots\ldots & x \end{vmatrix} \quad \text{de unde} \quad (-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot D_n(x)=\begin{vmatrix} -x & a_{12} & -x & a_{14}\,\ldots\ldots\ldots & -x \\ -a_{21} & x & -a_{23} & x\ \ldots\ldots\ldots & -a_{2n} \\ -x & a_{32} & -x & a_{34}\,\ldots\ldots\ldots & -x \\ -a_{41} & x & -a_{43} & x\ \ldots\ldots\ldots & -a_{4n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \\ -x & a_{n2} & -x & a_{n4}\,\ldots\ldots\ldots & -x \end{vmatrix}$$

obţinut prin înmulţirea coloanelor de ordin impar cu (-1).

Înmulţind liniile de ordin par cu (-1) obtinem: $(-1)^{\frac{n+1}{2}}\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}D_n(x)=\begin{vmatrix} -x & a_{12} & -x & a_{14}\dots\dots & -x \\ a_{21} & -x & a_{23} & -x\ \dots\dots & a_{2n} \\ -x & a_{32} & -x & a_{34}\dots\dots & -x \\ a_{21} & -x & a_{23} & -x\ \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & a_{n2} & -x & a_{n4}\dots\dots & -x \end{vmatrix}=$

$$=(-1)^n D_n(x)=\begin{vmatrix} -x & a_{12} & -x & a_{14}\dots\dots & -x \\ a_{21} & -x & a_{23} & -x\ \dots\dots & a_{2n} \\ -x & a_{32} & -x & a_{34}\dots\dots & -x \\ a_{21} & -x & a_{23} & -x\ \dots\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -x & a_{n2} & -x & a_{n4}\dots\dots & -x \end{vmatrix}=-D_n(x)=D_n(-x)$$

Cum $D_n(-x)=-D_n(x)$ rezultă că $D_n(0)=0$. Dar $D_n(0)=\det A$. Rezultă det A=0.

Problema3.
Fie A,B matrici pătratice de acelaşi ordin cu proprietatea ca există $\lambda\in R^*$ astfel încât $\lambda A\cdot B+A+B=0$ (0 fiind matricea nulă de acelaşi ordin cu matricea A şi B). Să se arate ca AB=BA.

Soluţie.În relaţia dată înmulţim ambii membrii cu λ şi adunăm matricea unitate U. Obţinem:
$$\lambda^2 AB+\lambda AB+\lambda B+U=U \Leftrightarrow (\lambda A+U)(\lambda B+U)=U\ .$$
Rezultă că matricea $\lambda A+U$ este inversabilă şi $\lambda B+U$ este inversa sa. Deci $(\lambda A+U)(\lambda B+U)=(\lambda B+U)(\lambda A+U)$ sau $\lambda^2 AB=\lambda^2 BA=\lambda^2(A-B)=0\Leftrightarrow AB=BA$,deoarece $\lambda^2\neq 0$, ceea ce trebuie aratat.

Probleme propuse

Clasa a V-a

Problema 1. Fie $\frac{a}{b}=\frac{6}{7}$. Să se afle $\frac{5b}{3a-2b}$.
(Iuliana Stoica)

Problemă 2. Fie trei numere. Dacă produsul dintre primul număr şi al doilea este 75, iar produsul dintre al treilea număr şi primul număr este 25, puteţi spune cât este produsul dintre primul număr şi suma celorlalte două numere?
(Iuliana Stoica)

Problemă 4. Trei iepuri şi doi porci costă cât două vaci. Patru porci costă cât cinci iepuri. O vacă şi un iepure costă 15 000 000 lei. Cât costă fiecare animal?
(Teodor Popa)

Clasa a IX-a

Se dă ecuaţia $x^2 - 2a\cos x + b = 0$.

a) Ce relaţii trebuie să satisfacă a şi b pentru ca ecuaţia dată să admită soluţii distincte?

b) Dacă $\cos x_1$ şi $\cos x_2$ sunt rădăcinile ecuaţiei anterioare atunci să se formeze ecuaţia care admite rădăcinile $\cos 2x_1$ şi $\cos 2x_2$.

Clasa aX-a

1.Fie un triunghi ABC cu $A=20^0$, $B=C=80^0$
Fie D Є(AC),E Є(AB) astfel incat [CD]=[BC] si ACE=CAE
Sa se arate ca unghiul CED are 30^0

2.Sa se determine numerele naturale $x\geq 2$, $y\geq 1$, stiind ca numerele C_{x-1}^{y-1}, C_{x-1}^{y}, C_{x-1}^{y} sunt in progresie aritmetica, iar numerele A_x^y, A_x^{y+1}, A_{x+1}^{y+1} sunt in progresie geometrica.
(Olimpiada de matematica,1980-etapa judeteana)

Clasele a XI-a si a XII-a

Problema 1. Dacă $A+B+C=\pi$ să se calculeze $\lim_{x\to C}\dfrac{\operatorname{tg}(A+B)\operatorname{tg}(A+x)-\operatorname{tg}B\operatorname{tg}C}{\operatorname{tg}(A+B+x)}$.

Problema 2. Să se arate că $\forall a,b,c\in R$

$$\begin{vmatrix} 1-a-b & c & c \\ a & 1-b-c & a \\ b & b & 1-c-a \end{vmatrix} \geq 0$$

(13 069, GM-B, *C.-I. Ţiu*)

Problema 3. Fie $a_0, a_1,\ldots,a_{2n}$ Є **R** fixati si pentru fiecare k natural, $0 \leq k \leq a_n$, fie P_k un polinom definit

astfel:

$$P_k(x)^k = a_0x^k + ka_1x^{k-1} + a_2k(k-1)x^{k-2} + \cdots + a_kk!$$

Sa se arate ca: $P_k'(x) = kP_{k-1}(x), k \in N, 1 \le k \le 2n, si\ ca\ functia:$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k C_{2n}^k P_k(x) P_{2n-k}(x) \text{ este constanta pe } \mathbf{R}.$$

(Gazeta Matematică – nr.6, anul 1981)

Caleidoscop matematic

Enigmele matematicii : Conjectura lui Poincaré

Conjectura lui Poincaré (sau şi "bănuiala lui Poncaré"), prima dată enunţată de matematicianul francez Henri Poincaré în 1904, afirmă că dacă într-un spaţiu închis şi nemărginit tridimensional (cufundat într-un spaţiu 4-dimensional) toate "cercurile" bidimensionale pot fi micşorate topografic până ce devin un punct, atunci acest spaţiu tridimensional este echivalent din punct de vedere topologic (homeomorf) cu o "sferă" 3-dimensională. Este interesant că problemele analoage referitoare la un spaţiu închis cu 2 dimensiuni, sau şi cu 4 sau chiar şi mai multe dimensiuni au fost demonstrate încă de mai demult.

Demonstraţia matematicianului rus Grigori Perelman în anul 2002 s-a situat pe primul loc în topul celor mai importante descoperiri matematice, alcătuit de prestigioasa revistă *Science* la 22 decembrie 2006. Enigmaticul savant rus a făcut senzaţie nu numai pentru că a rezolvat o problemă care i-a pasionat pe specialişti vreme de aproape un secol, dar şi pentru că în 2006 a refuzat medalia *Fields*, un premiu în matematică echivalent cu premiul Nobel , fiind prima persoană din lume care a făcut acest lucru. "Nu sunt interesat de bani sau faimă. Nu vreau să fiu expus ca un animal la Grădina Zoologică. Nu sunt un erou al matematicii. Nici nu sunt un om de succes, de aceea nu vreau ca toată lumea să se uite la mine", a declarat Perelman. Perelman a refuzat anul acesta (2010) şi recompensa de un milion de dolari pe care *Clay Mathematics Institute* din oraşul american Cambridge , Massachusetts a oferit-o pentru rezolvarea Conjecturii lui Poincaré. Cu toate că locuieşte într-un apartament mizer din St. Petersburg, Grigori Perelman în vârstă de 44 de ani, spune că nu are nevoie de bani. El a declarat din spatele uşii închise: "Am tot ce vreau". "Am fost o dată în apartamentul lui şi am rămas înmărmurită. Are numai o masă, un taburet şi un pat cu o saltea murdară lăsată acolo de vechii proprietari ai apartamentului, nişte alcoolici care i-au vândut locuinţa. Încercăm să scăpăm de gândacii din bloc, dar se ascund în apartamentul lui", a spus o vecină a matematicianului. Problema care avea mai mult de 100 de ani în 2002 când a rezolvat-o Perelman, atunci cercetător la Institutul de Matematică Steklov din St. Petersburg poate ajuta la determinarea formei universului. În 2003 Grigori Perelman a renunţat la slujba de la Institutul Steklov. Prietenii spun despre el că ar fi renunţat la matematică de tot, dar Perelman refuză să vorbească despre acest subiect, considerându-l, din motive personale prea dureros.

Pot greşi matematicienii?

Pot greşi matematicienii în calculele şi demonstraţiile lor? Cum să nu! Dreptul la greşeală neintenţionată este cel dintâi din toate drepturile, nu numai în viata omenească (că nu e om care să vietuiască si să nu gresească), ci si în domeniul stiintelor. Si cei mai ilustrii s-au înselat. Au spus străbunii nostrii romani: *Errare humanum est, perseverare diabolicum* . Să luăm numai prima parte a maximei: "A gresi este omeneste"; a gresi însă neintentionat.

Nu putem spune nimic despre Arhimede deoarece nu a lăsat nimic scris de mâna sa, adică, mai bine zis, până la descoperirea documentului de la Constantinopol (azi Istanbul), găsit în 1906 de către J.L. Heinberg si intitulat *Teoreme de mecanică, metode* - tratat adresat de Arhimede prietenului său Eratostene, nu cunosteam nimic scris de Arhimede, totul ne fusese transmis prin alţii. Dar acest tratat găsit la Constantinopol nu a fost studiat din punct de vedere al eventualelor erori.

Există în lume un singur matematician care nu are nici o eroare: Galois. Dar este explicabil: a murit la 21 de ani şi toată opera lui - de mare valoare de altfel - însumează 60 de pagini. De aceea Galois are, cum spune belgianul Maurice Lecat, *casier vierge* (cazierul nepătat). Dacă ar fi trăit mai mult, probabil nici Galois nu ar fi fost scutit de greseală.

Legendre a dat, de exemplu, 7 demonstraţii, toate bineînteles eronate, pentru *postulatul al V-lea a lui Euclid* privind dreptele paralele.

Asa că nu numai filozoful antichitătii Aristotel a greşit esenţial spunând că "un corp de 2 ori mai greu cade de 2 ori mai repede", ci a greşit însuşi Descartes. D'Alembert, Laplace şi Poisson au făcut erori de calcule în *calculul probabilităţilor*.

Anecdote şi amintiri din viaţa matematicienilor

Pitagora (565 - 500 î.e.n.)

Pitagora a fost totusi mai mult un filozof mistic decât un matematician. Discipolii săi, *pitagoreii* , au spus că "numărul este stăpânul universului". Pitagora şi pitagoreii, care au activat până la jumătatea a doua a secolului al VI-lea î.e.n., au pus problema studiului cantitativ al naturii, au început teoria numerelor la eleni, au făcut studiul matematic al muzicii şi al acusticii. Pe lângă descoperiri geometrice, pitagoreii au arătat că Pământul este un glob, au avut teorii medicale proprii, etc. Ei considerau că numerele sunt esenţa adevărată a lucrurilor.

Euclid (330 - 275 î.e.n.)

Strobaeus povesteşte următoarele despre Euclid: Cineva care a început să studieze geometria de la Euclid, după ce a învăţat întâia teoremă, l-a întrebat: "Dar ce folos voi avea eu învăţând aceste lucruri? " Euclid îşi chemă sclavul şi-i zice: "Dă-i acestuia trei oboli, fiindcă el vrea să câştige din ceea ce învaţă."

Arhimede (287 - 212 î.e.n.)

Sunt cunoscute multe legende despre Arhimede. Ca şi marii matematicieni de mai târziu (Newton în special), când Arhimede era preocupat de o problemă de matematică, uita unde se află, ba mai mult, uita şi să mănânce. Asa, de pildă, într-o zi pe când făcea baie în apa mării îşi dădu seama că a descoperit celebra sa lege de hidrostatică: un corp scufundat în apă suferă din partea acesteia o presiune din toate părţile, care contrabalansează exact greutatea volumului de apă dezlocuit. În momentul când Arhimede a descoperit intuitiv acest principiu, pe când înota în apă, s-a reîntors la mal şi s-a îndreptat gol spre casă, strigând: " Eureka, eureka", ceea ce în vechea elenă se pronunşa "evrica, evrica" şi înseamnă "am descoperit" sau "am găsit".

Pascal (1623 - 1662)

Când Pascal era la Port-Royal din Paris, clădire jansenitică în care intrau anumiti bigoţi, într-o noapte a avut o groaznică durere de măsele- tot ce a întrebuinţat pentru potolirea durerilor a fost de prisos. Atunci s-a apucat de studiul cicloidei, i-a descoperit o serie de proprietăţi şi a constatat în final că ... durerea de măsele i-a dispărut.

Newton (1642 - 1727)

Mergând o dată călare, preocupat de probleme de matematici, la poalele unui deal a descălecat; a luat apoi calul de căpăstru ca un automat, gândindu-se mereu la problemă. A urcat dealul pe jos, tinând de căpăstrul calului. Dar care nu i-a fost surpriza când, ajuns în vârful dealului, a constatat că ţinea în mână căpăstrul şi calul nu era nicăieri!

Altă dată Newton, care era celibatar, a vrut să-şi fiarbă un ou fără să-şi întrerupă lucrul. Îşi luă şi ceasul său de precizie ca să se uite la el şi să vadă când au trecut cele 3 minute pentru fierbere. Era însă preocupat mult de tema pe care o trata. Când îşi aduse aminte de fierberea oului, nu mică îi fu surpriza lui Newton când a constat că a pus ceasul la fiert, iar în mână şinea oul ca să citească minutele...

Newton era timid în public. Îi venea greu să se exprime în faţa mulţimii. Ca membru al parlamentului nu a luat decât o singură dată cuvântul. Membrii parlamentului se aşteptau la gânduri superioare ţâşnite din mintea lui Newton. El însă a cerut ... "să se închidă o fereastră că-i curent şi îl trage"! Apoi s-a aşezat jos pe scaun. Poţi fi deci genial matematician şi inexistent ca orator.

Newton, celibatarul, a invitat o dată pe un bun prieten al său la masă. Acesta vine la ora fixată şi, ca să nu-l deranjeze pe Newton de la lucru, se duce direct în sufragerie, aşteptând pe ilustrul său amic să termine lucrul şi să vină la masă. Dar Newton nu mai ieşea din biroul său de lucru. Atunci prietenul, răzbit de foame, se aşeză la masă, pe care era un pui fript sub un clopot, mănâncă o jumătate de pui şi plecă fără să-l avertizeze pe Newton. Mult mai târziu l-a răzbit foamea şi pe Newton. Savantul uitase complet de invitaţia pe care o adresase prietenului său. Newton vine în sufragerie, vede că e lipsă o jumătate de pui şi-şi spuse: "Uite ce distrat sunt; am mâncat şi am uitat". Şi se întoarce la lucru.

Euler (1707 - 1783)

Euler era un matematician de o aleasă cultură generală. Cunoştea pe dinafară şi recita în întregime *Eneida* lui Virgiliu. A recunoscut că versul din *Eneida* "Ancora cade la fund şi imediat chila (tălpoaia corabiei) care spintecă valul se opreşte" l-a făcut să studieze mişcarea corăbiei în momentul ancorării. Avea o memorie atât de prodigioasă, încât putea să spună, pentru ediţia de *Eneida* pe care o poseda, cu ce vers începe şi se termină o anumită pagină. De altfel, datorită acestei memorii a putut să producă lucrări de matematici în timpul orbirii sale, care a durat de la vârsta de 59 de ani până la 77 de ani, când a decedat.

Glume cu şi despre matematică şi matematicieni

1. Odată, Moisil avea un student bâtă… Şi îl bagă în oral. Îi pune pe masă 10 becuri şi îl întreabă:

-Dacă îmi spui câte becuri sunt aici, te trec examenul?

Studentul, fericit, răspunde:

-Sunt zece, domnule profesor!

-Greşit! spuse Mosil. Sunt 10 pe bancă şi cu ăsta din buzunarul meu sunt 11! Ne vedem la toamnă.

În toamnă iarăşi, studentul se prezintă la fel de bine. Moisil „îl invită" iarăşi în oral. La fel, îi pune pe masă cele 10 becuri şi îl întreabă:

-Câte becuri sunt aici?

-Sunt 11 becuri! răspunde studentul prompt.

-Greşit! Sunt numai 10! Nu mai am nici un bec în buzunar!
-GREŞIT, domnule profesor! Sunt zece becuri pe masă şi cu cel din buzunarul meu, sunt 11!
2.Se întâlneşte Zmeul cu Făt -Frumos îl întreabă:
-În ce vrei să ne batem, în săbii să ne tăiem sau în derivate să ne derivăm?
-În derivate!
Şi încep să se bată cei doi. Îl derivează Făt-Frumos pe Zmeu. Nimic. Îl mai derivează odată, şi încă odată, şi încă o dată... şi la un moment dat oboseşte şi îi zice:
- Mă a-l dracului mai eşti, zmeule! Eşti vreo rudă de-a lui e^x?

3. Q: Cum merge un elefant pe planul inclinat?
A: Tropa tropa cos de alpha.

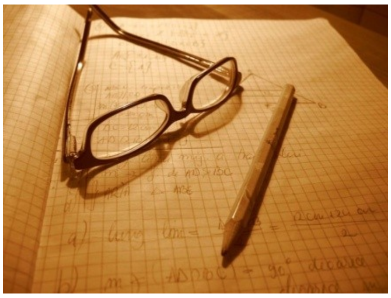
4. Un ardelean şi un matematician în tren... după un timp trec pe lângă o stână.
Ardeleanul 12345...425 de oi. Se uită matematicinaul, scoate un pix şi o foaie calculează... nimic. După o oră mai trec pe lângă o stână.
Ardeleanul 123456...281 de oi. Matematicianul scoate notebook-ul calculează, tot nimic, după încă câteva ore trec pe lângă altă stână. Ardeleanul: 12345...892 de oi. matematicianul scoate mobilul şi calculeazş… nimic...îi spune ardeleanului:
- Mă cum ai făcut? Eu matematician cu 'şpe mii de diplome nu am putut număra iar tu un ardelean... cum ai făcut?
- No da-i simplu domnul meu, numeri picioarele şi împarţi la patru...

5. Examen. Studentul iese la răspuns ţinând în mână o fiţuică, pe care sunt scrise câteva propoziţii.Profesorul: - Dar unde vă este răspunsul?
- În cap.
- Dar aceasta ce e? – indicând spre fiţuică.
- Aceasta n-a încăput.

6. În timpul examenului profesorul îl întreabă pe student:
- De ce sunteţi aşa de tulburat? Vă temeţi de întrebările mele?
- Nu, domn profesor! Mă tem de răspunsurile mele.

7. Examen la fizică. Studentul răspunde foarte prost. Profesorul încearcă să-l ajute:
- Spuneţi-mi, măcar, la ce temperatură fierbe apa?
- Domn profesor, eu nu ştiu la ce temperatură fierbe apa, însă, ştiu că la 40 de grade se transformă în vodcă!

Cugetări şi figuri de stil în termeni matematici



Goethe
“Împărţirea existenţei prin raţiunea omenească să se facă fără rest.”
L.Blaga
“Personalitatea este rasa la puterea a doua.”
Lagrange
“Pretenţiile sunt în raport invers cu meritele.”
Ion Barbu:
”Există undeva în domeniul înalt al geometriei, un loc unde se întâlneşte cu poezia.”
Gauss: “Pauca sed natura.”(puţine dar coapte)
Leibniz:

“Totul este pentru mai bine în cea mai bună din lumile posibile.”
Sylvester:
”Nu s-ar putea oare reprezenta muzica drept matematică a simţurilor şi matematica drept muzică a raţiunii? Căci muzicianul simte matematica, iar matematicianul concepe muzica. Muzica-i vis, matematica- viaţă practică.”

Culmi matematice

Culmea geometriei pure: să studiezi proprietăţile figurilor… oratorice!
Culmea astronomiei: să măsoare paralaxa stelelor…verzi!
Culmea abilităţilor unui chirurg: să opereze un calcul…integral!

ŞTIAŢI CĂ...

*Gazeta Matematică reprezintă 111 ani de istorie matematică, dar şi 111 ani de cultură romanească oglindită în teoriile matematice.

*Termenii "sinus" şi "cosinus" au fost introduşi în limba română în anul 1820 de către Gheorghe Lazăr (1779 - 1823)

*În anii ‘60 ideile comuniste trebuiau să se regăsească inclusiv în problemele de matematică? Iată cateva exemple : E: 1642. Directivele celui de-al III-lea Congres al P.M.R. prevăd că pînă la sfârşitul anului 1965, producţia de carne şi lapte să ajungă la 600 000 tone anual şi 5 000 000 hl anual. Ştiind că producţia de carne şi lapte a anului 1959 reprezintă 60 % şi respectiv 75 % din producţia anului 1965, să se afle de cîte ori se va mări producţia de carne şi lapte a anului 1965 faţă de producţia anului 1959.

*Studierea matematicii a fost prevăzuta în Regulamentul Organic?

*“Triunghiul lui Pascal” îşi are rădăcinile în China anului 1200 când Jia Xien a realizat primele studii de acest gen?

*Leonardo da Vinci anticipează încă din anul 1491 construirea ceasului cu pendulă? Acesta va fi conceput două sute de ani mai târziu, în anul 1656, de matematicianul german Christiaan Huygens.

*Primul exerciţiu matematic care utiliza inducţia matematică apare în 1575? Acesta demonstra că suma primelor N numere naturale impare este egală cu N la puterea 2.

*primul “calculator” apare în 1623 şi este realizat de Wilhelm Schickard? Maşina este denumită ***Speeding Clock*** şi putea face singură adunări şi scăderi dar numai cu numere compuse din maxim 6 cifre.

*Prima maşină de calcul care poate realiza operaţii de împărţire şi înmulţire apare în 1671 şi este realizată de Wilhelm Gottfried Leibnitz?

*Conjectura că orice număr par mai mare decât 2 este suma a două numere prime, propusă de Christian Goldbach în 1772, nu a fost infirmată sau confirmată până în prezent?

*Calculatorul electronic apare în 1946? Acesta a fost folosit încă de la început pentru calcularea numerelor prime.

*Pentru n > 5, între numerele naturale n şi 2n avem cel puţin două numere prime?

*În plan, dintre toate figurile geometrice cu acelaşi perimetru, cercul are aria cea mai mare?

*În anul 2000 d. Hr. Matematicianul american Nayan Hayratwala a lucrat simultan cu mai mult de 20 de mii de calculatoare de pe întreg globul şi a obţinut numărul prim 2 6 972 593 - 1 fiind cel mai mare număr prim cunoscut. Pentru scrierea acestui număr sunt necesare două milioane de cifre.

*Atât numele de Google, cât şi Yahoo!, două mărci de succes în materie de motoare de căutare, îşi au originea în matematică, respectiv literatură? Google provine de la termenul matematic "googol", care înseamnă "numărul 1 urmat de 100 de zerouri", în timp ce Yahoo era un personaj din cartea lui Johnatan Swift, "Călătoriile lui Gulliver".
*Se spune , că odată a venit cineva la Pitagora şi l-a rugat să-i arate cum ar trebui să fie doi oameni , unul faţă de altul , ca să se poată numi cu adevărat prieteni ? Să se comporte ca numerele 220 şi 284 , a răspuns Pitagora , fiindcă aceste numere sunt astfel că fiecare din ele este format din suma părţilor celuilalt , adică fiecare este un alt eu . Ori , ca să se petreacă aceasta , oamenii nu pot fi luaţi la întâmplare , după cum nici numerele nu-s oarecare , ci numai 220 şi 284.

Bibliografie

www.realitatea.net
Colecţia Gazeta Matematică seria A şi B
Wikipedia, enciclopedia liberă

Cuprins

Colectivul de redacţie

Alina Militaru, XI C
Daniela Preda, XI C
Cristian Contaşel, XI C
Andrei Mihăilă, IX C

Profesori îndrumători

Carmen Axon
Mariana Leu
Iuliana Stoica